Решение иррациональных неравенств

Смольникова Ирина Вячеславовна,

учитель математики ГБОУ лицея №329 г. Санкт-Петербурга

Цели:

1. Общеобразовательная: систематизировать, обобщить, расширить знания и умения учащихся, связанные с применением методов решения неравенств.
2. Развивающая: развивать у учащихся умение слушать лекцию, конспективно записывая ее в тетрадь, анализировать, выделять главное и обобщать.
3. Воспитательная: формировать познавательную мотивацию к изучению математики, а так же логическое и системное мышление, развивать интеллектуальное умение и мыслительные операции – анализ, синтез, сравнение, обобщение, воспитывать активность в труде, самостоятельность.

Задача урока: составить подробный конспект лекции.

Тип урока: изучение новой темы

Методы обучения: Объяснительно-иллюстративный, частично поисковый при нахождении способов решения иррациональных неравенств

Ход урока

1. **Организационный момент:** приветствие учащихся
2. **Проверка домашнего задания:** 2 человека решают на обратной стороне доски уравнения, которые были заданы на дом. С последующим обсуждением решений.

3. Вводная беседа:

Мы с вами закончили тему “Решение иррациональных уравнений” и сегодня начинаем учиться решать иррациональные неравенства. Сначала давайте вспомним, какие виды неравенств вы умеете решать и какими методами?

Ответ: Линейные, квадратные, рациональные, тригонометрические. Линейные решаем, исходя из свойств неравенств, тригонометрические сводим к простейшим тригонометрическим, решаемым с помощью тригонометрического круга, а остальные, в основном, методом интервалов.

Вопрос: На каком утверждении основан метод интервалов?

Ответ: На теореме, утверждающей, что непрерывная функция, не обращающаяся в ноль на некотором интервале, сохраняет свой знак на этом интервале.

4. Давайте рассмотрим иррациональное неравенство типа $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$

Вопрос: Можно ли применить для его решения метод интервалов?

Ответ: Да, так как функция $y = \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ непрерывна на $D(y)$.

Решаем такое неравенство <u>методом интервалов</u>.

Пример 1:

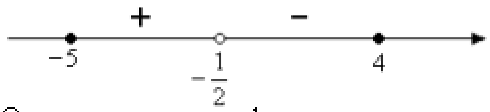
$\sqrt{4-x} > \sqrt{x+5}$

1) $f(x) = \sqrt{4-x}$ - $\sqrt{x+5}$

2) $D(f)$: $\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow D(f)$: [-5;4]

3) $f(x)$ непрерывна на $D(f)$

4) Нули функции: $\sqrt{4-x} - \sqrt{x+5} = 0 \Leftrightarrow 4-x = x+5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \in D(f)$

5) 

Определим знаки функции на каждом интервале знакопостоянства:

$f(-3) = \sqrt{4-(-3)} - \sqrt{-3+5} = \sqrt{7} - \sqrt{2} > 0$

$f(0) = \sqrt{4} - \sqrt{5} < 0$

Ответ: $[-5; -\frac{1}{2})$.

Вывод: мы довольно легко решили данное иррациональное неравенство методом интервалов, фактически сведя его к решению иррационального уравнения.

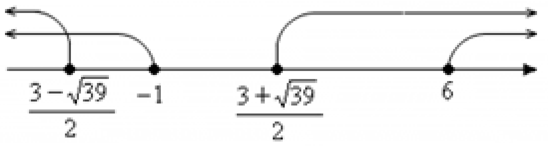
Давайте попробуем решить этим методом другое неравенство.

Пример 2:

$\sqrt{x^2-5x-6} < \sqrt{2x^2-6x-15}$

1) $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}-\sqrt{2x^2-6x-15}$

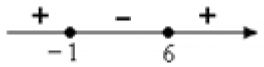
2) $D(f)$: $\begin{cases} x^2-5x-6\geq 0 \ (1) \\ 2x^2-6x-15\geq 0 \ (2) \end{cases}$



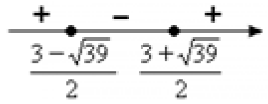
$D(f)$: $\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{39}}{2}\right]\cup[6;+\infty)$

1) $x^2-5x-6\geq 0$

$(x-6)(x+1)\geq 0$



2) $2x^2-6x-15\geq 0$



$2x^2-6x-15=0$

$D=36+120=156$

$x_{1;2}=\frac{6\pm 2\sqrt{39}}{4}$

$x_{1;2}=\frac{3\pm\sqrt{39}}{2}$

3) *f(x)* непрерывна на *D(f)*

4) Нули функции:

$\sqrt{x^2-5x-6}-\sqrt{2x^2-6x-15}=0 \Leftrightarrow x^2-5x-6=2x^2-6x-15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-x-9=0 \Leftrightarrow x_{1;2}=\frac{1\pm\sqrt{37}}{2}$

Не будем решать дальше, так как сталкиваемся с вычислительными трудностями:

- Долго искать *D(f)*.
- Трудно вычислять контрольные точки.

Возникает вопрос: “Нет ли других способов решения этого неравенства?”.

Очевидно, есть, и сейчас мы с вами с ними познакомимся.

5. Итак, ***тема*** сегодняшнего ***урока: “Методы решения иррациональных неравенств”.***

Урок будет проходить в виде лекции, так как в учебнике нет подробного разбора всех методов. Поэтому наша важная задача: составить подробный конспект этой лекции.

6. О первом методе решения иррациональных неравенств мы с вами уже поговорили.

Это – <u>метод интервалов</u>, универсальный метод решения всех типов неравенств. Но он не всегда приводит к цели коротким и простым путем.

7. При решении иррациональных неравенств можно использовать те же идеи, что и при решении иррациональных уравнений, но так как простая проверка решений невозможна (ведь решениями неравенств являются чаще всего целые числовые промежутки), то необходимо использовать равносильность.

Приведем схемы решения основных типов иррациональных неравенств <u>методом равносильных переходов</u> от одного неравенства к системе неравенств.

1. $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) \ge 0 \text{ - лишнее условие} \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$

$y = \sqrt{t}$

$\sqrt{t_1} > \sqrt{t_2} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 > t_2 \text{ - по определению возрастающей функции} \\ t_2 \ge 0 \\ t_1 \ge 0 \end{cases}$ - лишнее условие, так как $t_1 > t_2 \ge 0$

то есть $\begin{cases} t_1 > t_2 \\ t_2 \ge 0 \end{cases}$

2. Аналогично доказывается, что

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$$

3. а) $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^2(x) \\ f(x) \ge 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

б) $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^2(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \end{array} \right.$

Запишем эти схемы на опорной доске. Над доказательствами 3 и 4 типа подумайте дома, на следующем уроке мы их обсудим.

8. Решим новым способом неравенство.

Пример 3:

$$\sqrt{2x - x^2 + 1} > 2x - 3$$

Исходное неравенство равносильно совокупности систем.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-x^2+1>(2x-3)^2\\2x-3\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}2x-x^2+1\ge 0\\2x-3<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x^2-14x+8<0\\x\ge\dfrac{3}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-2x-1\le 0\\x<\dfrac{3}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{4}{5}<x<2\\x\ge\dfrac{3}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}1-\sqrt{2}\le x\le 1+\sqrt{2}\\x<\dfrac{3}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{3}{2}\le x<2\\1-\sqrt{2}\le x<\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[1-\sqrt{2};2\right)$

9. И существует еще третий метод, часто помогающий решать сложные иррациональные неравенства. Мы с вами о нем уже говорили применительно к неравенствам с модулем. Это <u>метод замены функций (замены множителей).</u> Напомню вам, что суть метода замены заключается в том, что разность значений монотонных функций можно заменить разностью значений их аргументов.

Рассмотрим иррациональное неравенство вида $\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)}$,

то есть $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}<0$.

По теореме, если *p(x)* возрастает на некоторм промежутке, которому принадлежат *a* и *b*, причем *a*>*b*, то неравенства *p(a)* – *p(b)* > 0 и *a* – *b* > 0 равносильны на *D(p)*, то есть

$$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}<0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)-g(x)<0\\g(x)\ge 0\ \text{ - лишнее условие.}\\f(x)\ge 0\end{cases}$$

10. Решим методом замены множителей неравенство.

Пример 4:

$$\frac{\sqrt{3x^2-3x+7}-\sqrt{6+x-x^2}}{(10x-7)(10x-3)}\ge 0$$

Знак числителя $\sqrt{3x^2-3x+7}-\sqrt{6+x-x^2}$

совпадает со знаком разности $(3x^2-3x+7)-(6+x-x^2)$

при условии, что $x\in D(f)$.

Значит, данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{3x^2-3x+7-6-x+x^2}{(10x-7)(10x-3)} \ge 0 \\ 3x^2-3x+7 \ge 0 \quad (1) \\ 6+x-x^2 \ge 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2-4x+1}{(x-0{,}7)(x-0{,}3)} \ge 0 \quad (3) \\ -2 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\infty;0{,}3) \cup \{0{,}5\} \cup (0{,}7;+\infty) \\ [-2;3] \end{cases}$$

Ответ: $[-2;0{,}3) \cup \{0{,}5\} \cup (0{,}7;3]$.

(1) $3x^2-3x+7 \ge 0$

$3x^2-3x+7=0$

$\begin{pmatrix} D<0 \\ a=3>0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x \in R$

(2) $-x^2+x-6 \ge 0 \;\Leftrightarrow\; x^2-x+6 \le 0 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; (x-3)(x+2) \le 3 \;\Leftrightarrow\; -2 \le x \le 3$

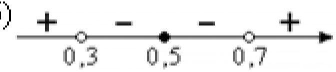
(3) $\dfrac{(2x-1)^2}{(x-0{,}7)(x-0{,}3)} \ge 0$

1) $y = \dfrac{(2x-1)^2}{(x-0{,}7)(x-0{,}3)}$

2) $D(y)$: $x \ne 0{,}7;\; x \ne 0{,}3$

3) $y=f(x)$ непрерывна на $D(y)$

4) Нуль функции: $x = \dfrac{1}{2}$ - корень кратности 2

5) 

Таким образом, мы увидели, что применение метода замены множителей для сведения решения неравенства к методу интервалов существенно сокращает объем работы.

11. Теперь, когда мы разобрали три основных метода решения уравнений, давайте выполним ***самостоятельную работу с самопроверкой.***

Нужно решить следующие задания методом равносильных переходов и методом замены множителей.

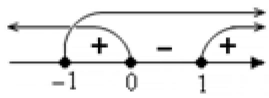
Через 10 минут открываем доски с решениями:

$\sqrt{3x^2+1} \ge x+1$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ 3x^2+1 \ge (x+1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1<0 \\ 3x^2+1 \ge 0 \end{cases} \text{ - верно при } \forall x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -1 \\ 3x^2+1-x^2-2x-1 \ge 0 \end{cases} \\ x<-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -1 \\ 2x(x-1) \ge 0 \end{cases} \\ x<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} [-1;0] \cup [1;+\infty) \\ x<-1 \end{array}\right.$$

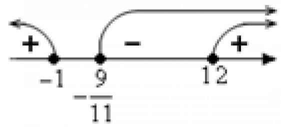


Ответ: $(-\infty;0] \cup [1;+\infty)$.

$\sqrt{x^2 - 11x - 12} < \sqrt{x^2 + 11x + 6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 11x - 12 - (x^2 + 11x + 6) < 0 \\ x^2 - 11x - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -22x - 18 < 0 \\ (x+1)(x-12) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{9}{11} \\ (-\infty; -1] \cup [12; +\infty) \end{cases}$$



Ответ: $[12; +\infty)$.

12. Подведение итогов:

Вопрос: Какие способы мы рассмотрели для решения иррациональных неравенств?

Ответ:

1. Метод интервалов;
2. равносильные переходы к системе неравенств;
3. метод замены множителей.

13. Домашнее задание:

1. Оформить конспект лекции в тетради и подумать над доказательствами неравенств 3 и 4 в методе равносильных переходов;
2. Решить неравенства: $\dfrac{\sqrt{x+11}}{x^2 + 2x} \geq 0$;

$$\frac{\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt[3]{3x^2 + 4x - 2} - \sqrt[3]{-3x^2 - x + 4}} \geq 0.$$